

ET I Übung 6

Aufbau:

- Fragen zu Netzwerken
 - Nachbesprechen alter Serie
 - Theorie Repetition
- (Pause)
- Alte Prüfungsaufgabe zusammen
 - Selber lösen + Fragen + Tipps



n.ethz.ch/~kursulovic

STATIONÄRES MAGNETFELD

Formelsammlung, S. 8-9

ETH zürich

Mindmap

Magnet

Maxwell Glg. (Ampère)/Durchflutung:

$$\Theta := \oint_C \vec{H} \cdot d\vec{s} = \iint_A \vec{J} \cdot d\vec{A} \longleftrightarrow \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}$$

Magnetische Feldstärke \vec{H}

Biot-Savart:

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \iiint_V \vec{J}(\vec{r}') \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV'$$

Ursache von \vec{H} :
Bewegte Ladung q , Strom I

$$|\vec{F}_2| = -\frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1 I_2 l}{\rho}$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})$$

ext. Strom
Material

Magnetische Flussdichte \vec{B}

Maxwell Glg. (Quellenfrei)/mag. Fluss:

$$\Phi := \oiint_{\partial V} \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0 \longleftrightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

Kraft auf Ladung
 $\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B})$

Kraft auf Strom
 $\vec{F} = I(\vec{s} \times \vec{B})$

$$\vec{F}_{AB} = I \int_A^B d\vec{r} \times \vec{B}(\vec{r})$$

Materialeigenschaften und Zustand
 μ : Permeabilität
 $\vec{M} = \frac{1}{V} \sum_{n=1}^N \vec{m}_n$ Magnetisierung (Material)

STATIONÄRES MAGNETFELD 1 ZUSAMMENFASSUNG

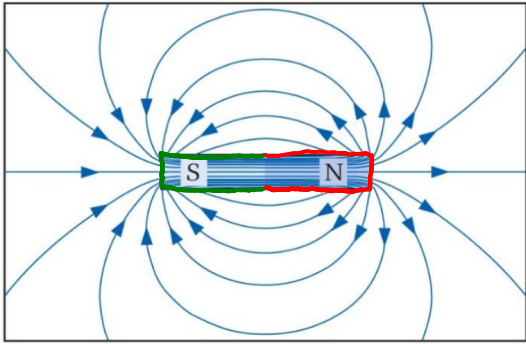
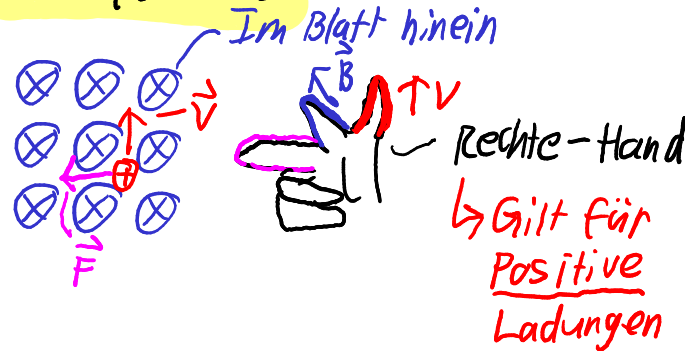


Abbildung 5.2: Verlauf der Feldlinien bei einem Stabmagneten

- Nord- und Südpol
- Elementarmagnete $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$
- $\boxed{S} \boxed{N} \xrightarrow{F} \boxed{N} \boxed{S} \xrightarrow{F} \boxed{S} \boxed{N} \xrightarrow{F} \boxed{S} \boxed{N}$
- Feldlinien Außen: Nord \rightarrow Südpol
Innen: Süd \rightarrow Nordpol

- Ferromagnetische Stoffe (e.g. Eisenspähne) \rightarrow Influenz.
- Feldlinien auch im Vakuum

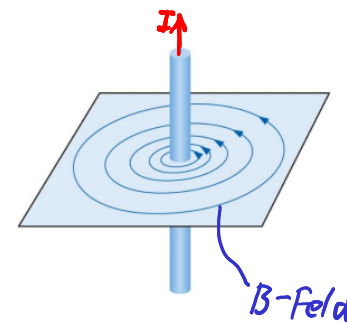
$$\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B})$$



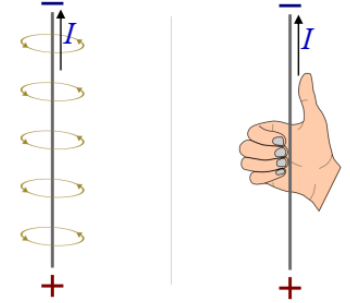
$$\vec{F} = I(\vec{s} \times \vec{B})$$



B -Feld um Leiter



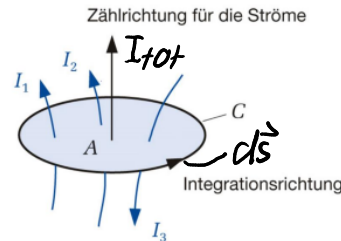
Rechte Hand-Regel



Oersted's Gesetz;

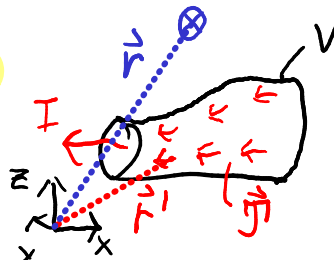
$$I_{\text{tot}} = \iint \vec{J} d\vec{A} = \oint_C \vec{H} d\vec{s} = \Theta$$

mit $\vec{J} = \vec{\nabla} \times \vec{H}$ Ring integral

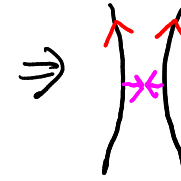


BIOT-SAVART

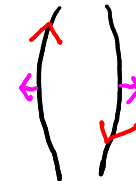
$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \iiint_V \vec{J}(\vec{r}') \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV'$$



Ströme in gleiche Richtung



Ströme in entgegen- gesetzte Richtung



Flussdichte Feldstärke:

$$\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H}$$

Magnetische Spannung!

$$V_{m,AB} = \int_A^B \vec{H} d\vec{s}$$

Magnetischer Fluss:

$$\Phi_A = \iint_A \vec{B} d\vec{A}$$

Übersicht der Feldgrößen

Tabelle 5.1

Zusammenstellung der Feldgrößen

	Elektrisches Feld	Magnetisches Feld
Intensitätsgröße Beschreibt die Wirkung (Kraft)	$\vec{E}, [\vec{E}] = \frac{V}{m}$ elektrische Feldstärke	$\vec{B} = \mu_0 \vec{H}, [\vec{B}] = \frac{Vs}{m^2} = T$ magnetische Flussdichte
Quantitätsgröße Beschreibt die Ursache (Quelle)	$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}, [\vec{D}] = \frac{As}{m^2}$ elektrische Flussdichte, elektrische Erregung	$\vec{H}, [\vec{H}] = \frac{A}{m}$ magnetische Feldstärke, magnetische Erregung
Feldkonstante	$\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \frac{As}{Vm}$ im Vakuum $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$ im Material	$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{Vs}{Am}$ im Vakuum $\mu = \mu_r \mu_0$ im Material

μ_0 : Permeabilität des Vakuums (Mag. Feldkonstante)
 μ_r : Permeabilitätszahl

$\mu_r \mu_0$: Permeabilität

BIOT-SAVART (Wird weniger von hand berechnet)

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \iiint_V \vec{J}(\vec{r}') \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV'$$

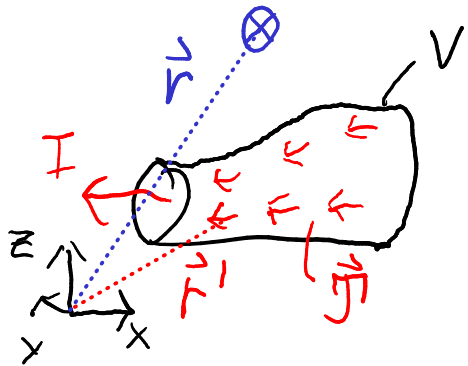
Als Vergleich E-Feld

$$\vec{E}(\vec{r}_p) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho(\vec{r}') \frac{\vec{r}_p - \vec{r}'}{|\vec{r}_p - \vec{r}'|^3} d\vec{r}'$$

Besagt welche Magnetfeldstärke im Punkt \vec{r} herrscht in abhängigkeit von allen Strömen die in einem Volumen fließen.

⇒ Integriert wird über alle Stromdichten über alle Punkte \vec{r}' im Leiter mit Volumen V

Für Beispiel siehe Vorlesungslides



Für spezifische Anordnungen kann folgendes hergeleitet werden:

Magnetische Feldstärke
eines unendlich langen
geraden Leiters

$$\vec{H}(\rho) = \begin{cases} \vec{e}_\phi \frac{I}{2\pi a^2} \rho & \rho \leq a \\ \vec{e}_\phi \frac{I}{2\pi \rho} & \rho > a \end{cases}$$

ρ , Abstand zum Zentrum des Leiters
 a , Radius des Leiters
 \vec{e}_ϕ , Einheitsvektor in ϕ -Richtung in
Zylinderkoordinaten

Magnetische Feldstärke
im Inneren einer
idealisierten Toroidspule

$$\vec{H}(\rho) = \vec{e}_\phi \frac{NI}{2\pi \rho}$$

ρ , Abstand zum Zentrum der Spule
 N , Wicklungszahl
 \vec{e}_ϕ , Einheitsvektor in ϕ -Richtung in
Zylinderkoordinaten

Magnetische Feldstärke
im Inneren einer
idealisierten
langgestreckten
Zylinderspule

$$\vec{H} = \vec{e}_x \frac{NI}{l}$$

N , Wicklungszahl
 l , Spulenlänge
 \vec{e}_x , Einheitsvektor in x-Richtung

MAGNETISCHE FELDSTÄRKE / -FLUSSDICHTE / -SPANNUNG / -FLUSS

Wir suchen analogien zum E-Feld!

$$\Rightarrow \vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H}$$

Flussdichte

Feldstärke

μ : Permeabilität (kann > 1 sein!)

μ_r : Permeabilitätszahl (im Medium)

μ_0 : Mag. Feldkonst. (im Vakuum) $\sim 1.257 \cdot 10^{-6} \frac{Vs}{Am}$

$$\vec{D} = \epsilon_r \epsilon_0 \vec{E}$$

Flussdichte
Abgeschwächt

Feldstärke
Volle Stärke

Permittivitätszahl
E-Feldkonstante $\sim 8.854 \cdot 10^{-12} \frac{As}{Vm}$

Magnetische Spannung!

$$V_{m,AB} = \int_A^B \vec{H} d\vec{s}$$

$$V_{e,AB} = \int_A^B \vec{E} d\vec{s}$$

Magnetischer Fluss!

$$\Phi_A = \iint_A \vec{B} d\vec{A}$$

$$\Psi_A = \iint_A \vec{D} d\vec{A}$$

Da aber Magnetfelder quellenfrei sind gilt:

$$\Phi_A = \oint_A \vec{B} d\vec{A} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \text{div } \vec{B} = 0, \text{ da alles was rein fließt auch raus fließen muss}$$

Gesamtoberfläche

ENTSTEHUNG MAGNETISIERUNG (Elementarmagnete) (weniger wichtig)

Idee: Magnetischer Dipol:

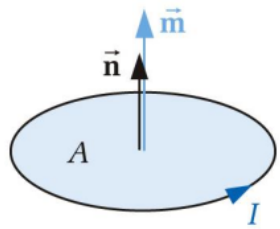
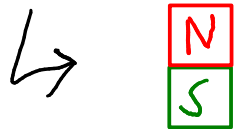


Abbildung 5.19: Magnetischer Dipol

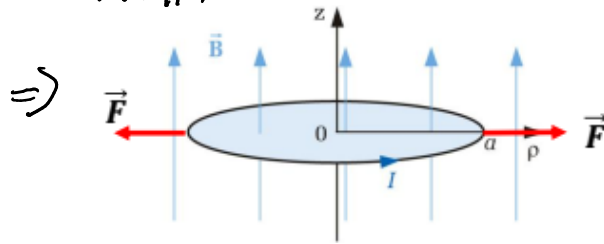
Magnetisches Moment: $\vec{m} = I \cdot A \cdot \vec{n} = I \vec{A}$

⇒ Mehrere Dipole: $\vec{M} = \frac{1}{V} \sum_n \vec{m}_n$

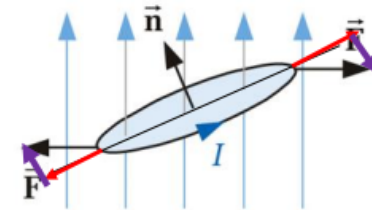
"Polarisation" – Prozess des Magnetisierens



$\vec{m} \parallel \vec{B}$



nicht Parallel
 $\vec{m} \nparallel \vec{B}$



Magnetische Polarisation

Volumen

$$\vec{J} = \frac{1}{V} \sum_{n=1}^N \vec{J}_n = \mu_0 \vec{M}$$

Basically abgeschwächter Dipol

⇒ Drehmoment entsteht

⇒ Dipol wird entsprechend \vec{B} gedreht.

Weitere Beziehungen:

Beziehung zwischen magnetischer Feldstärke und magnetischer Flussdichte

$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + (\mu - \mu_0) \vec{H} = \mu_0 \vec{H} + \vec{J}$$

μ , Magnetische Permeabilität

Beziehungen zwischen den Feldgrößen, der Magnetisierung \vec{M} und der magnetischen Polarisation \vec{J}

$$\vec{J} = (\mu - \mu_0) \vec{H} = \mu_0 (\mu_r - 1) \vec{H} = \mu_0 \chi \vec{H}$$

μ , Magnetische Permeabilität

μ_r , Relative Permeabilität

\vec{M} , Magnetisierung

χ , Magnetische Suszeptibilität

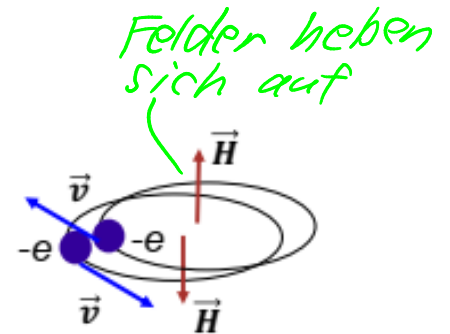
$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})$$

$$\vec{M} = \chi \vec{H}$$

DIA- / PARAMAGNETISMUS

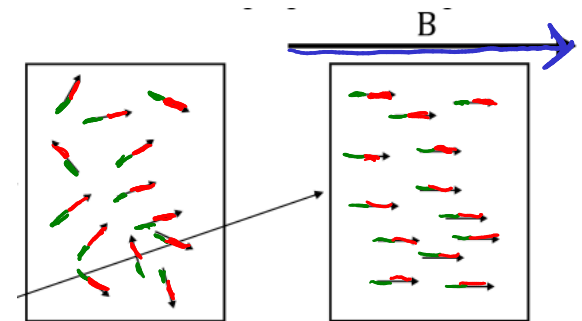
Diamagnetische Materialien $\mu_r < 1 \Rightarrow$ Feldabschwächung
 \hookrightarrow Permeabilitätszahl

- Temperatur unabhängig
- Abhängig vom - Aggregatzustand
- Kristallstruktur
- In Materialien mit abgeschlossenen Schalen: $\# \text{Spin } \uparrow = \# \text{Spin } \downarrow$
 \hookrightarrow Nummer / Anzahl
- Mehr dazu sobald wir die Magnetodynamik anschauen



Paramagnetische Materialien: $\mu_r > 1$

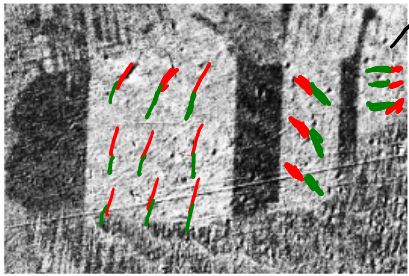
- Ungerade Anzahl e^- auf 'äussere Schale
- Steigende Temp. $\Rightarrow \downarrow$ Paramag.
- Nur ausgerichtet wenn externes Feld anliegt



FERROMAGNETISMUS Materialien wie Eisen, Nickel, Cobalt

↳ Fer → Eisen

Ferromagnetische Materialien: $\mu_r \gg 1$



<https://de.wikipedia.org/wiki/Weiss-Bezirk>

SiFe

- weisse Bezirke mit gleicher Ausrichtung der Momente
- Temp. abhängig.

T_C : Curie-Temp. kein Ferro mag.

• Ausrichtung bleibt teilweise erhalten nach abfall von \vec{H}

⇒ Hysteresekurve:

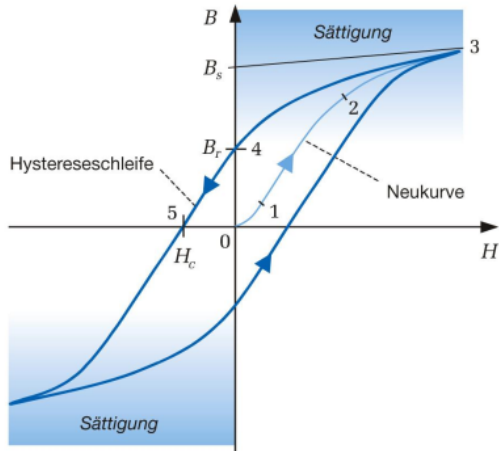
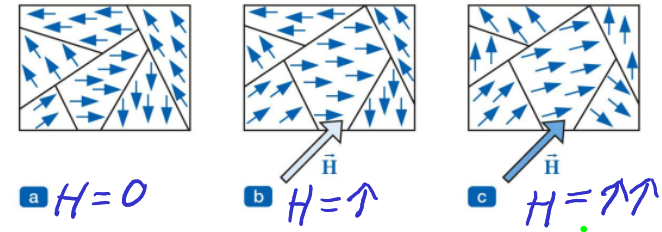


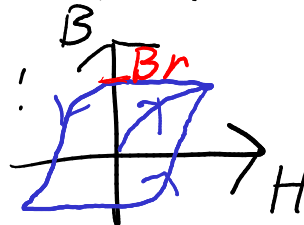
Abbildung 5.21: Magnetisierungskurve eines ferromagnetischen Materials

- Beziehung: $B \leftrightarrow H$ (Intern - Extern)
- 0 → 1 → 2: Steigendes H führt zu Magnetisierung (Neukurve)
- 2 → 3: Erreichen der Sättigungsflussdichte B_S (alle Momente ausgerichtet)
- 3 → 4: Ausschalten von H ⇒ es bleibt Remanenzflussdichte B_r (Restmagnetismus)
- 4 → 5: Um Remanenz zu eliminieren, braucht es die Koerzitivfeldstärke H_c

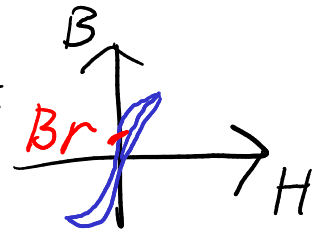


- starke Felder richten Momente aus.

• Dauer Magnete haben hohe B_r :



In Trafos braucht's kleine B_r :



FELDGRÖSSEN AN GRENZFLÄCHEN

Reminder: Für E-Felder hatten wir die Bedingung:

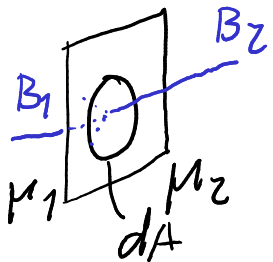


Stehs
senkrecht
Austreten!

⇒ Für B-Felder ist das nicht unbedingt der Fall
(Da keine Magn. Einzelladungen)

D.h. • Wenn B-Feldlinien das Medium wechseln behalten sie ihre Ausrichtung
• Zusätzlich gilt Kontinuität (alles was rein fließt muss auch raus fließen)

⇒



$$\vec{B}_1 = \vec{B}_2 \Rightarrow B_{n1} = B_{n2}$$

natürlich gibt es Abschwächung / Verstärkung: $\mu_1 H_{n1} = \mu_2 H_{n2}$

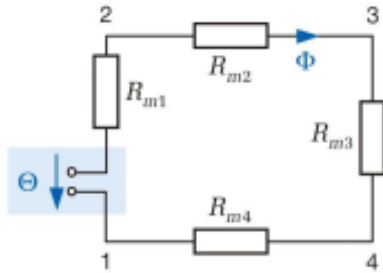
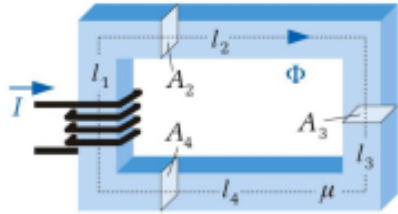
Aus dem Durchflutungsgesetz gilt: $\Theta = \oint_C \vec{H} \cdot d\vec{s}$, da aber keine Ströme an der

Grenzfläche fließen gilt: $H_{t1} = H_{t2}$

Beziehung $H \leftrightarrow B \Rightarrow \frac{B_{t1}}{B_{t2}} = \frac{\mu_1}{\mu_2}$

MAGNETISCHE KREISE

Wir hatten elektrische Ströme, die durch E-Felder in Leiter ausgelöst wurden.
Können wir magnetische Ströme bzw. Flüsse haben? Wieso nicht!



Magnetische Spannung! $V_{m,AB} = \int_A^B \vec{H} d\vec{s}$

$$\oint_{tot} \vec{H} d\vec{s} = V_{tot}$$

Magnetischer Fluss: $\Phi_A = \iint_A \vec{B} d\vec{A}$

- Idealisierung!
- Ferrumagn. Material
 - Äußerer Fluss vernachlässigbar
 - Innerhalb homogen
 - Keine Streuung

Obwohl die Durchflutung mit dem elektrischen Strom im Zusammenhang steht, steht sie in magnetischen Kreisen für die magnetische Spannung

⇒ Analogie zu Kirchhoff:

Knotenregel

$$\sum_i \Phi_i = 0$$



$$\Rightarrow B_1 A_1 = B_2 A_2 = \dots = B_n A_n$$

Maschenregel

$$\oint_{tot} \vec{H} d\vec{s} = \sum_i V_{m,i} = \sum_i H_i l_i$$

↪ magn. Spannungsabfall an Eisenabschnitten

Länge einzelner abschnitte

magnetisches URL

$$V_m = R_m \Phi$$

mit Abschnittslänge

$$R_m = \frac{l}{\mu A} \quad \text{"Reluktanz"}$$

↪ Abschnittsfläche

(Rechenbeispiel in Vorlesungslides)

INDUKTIVITÄTEN (Die magnetische analogie von Kapazitäten)

Wir wissen Kondensatoren können elektrische Energie speichern.


Spulen können magnetische Energie speichern!

$$\Rightarrow L = \frac{\Phi_V}{I} = \frac{N\phi}{I}$$

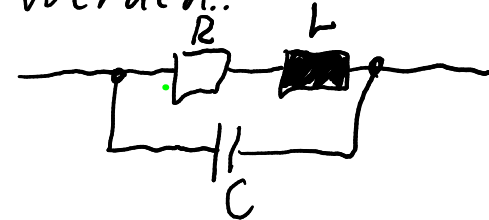
spulen haben
N windungen
pro windung ein
magn. Fluss ϕ

"magn. Fluss pro elek. Strom"

L "Induktivität" $[L] = H = \frac{Vs}{A}$
"Henry"

\Rightarrow Symbole: 

Spulen können wie folgt
schematisch dargestellt
werden!



R! Leiterwiderstand

C! Kapazität zwischen
schleifen

L! Induktivität der Spule

Zur berechnung der Induktivität:

Meist ist Φ_V nicht geg. hilfreiche tools sind:

- Oerstedds gesetz $\vec{H} = \oint_C \vec{H} d\vec{s}$ für H

- $B \leftrightarrow H$ beziehung für B

- Magnetischer Fluss! $\phi = \iint_A \vec{B} d\vec{A}$

Achtung dies gilt
für eine schleife

\Rightarrow • N für alle schleifen

- Wichtig Induktivitäten können
auch innerhalb von Leiter existieren!

Aus Reluktanz Modell: $L = \frac{N^2}{R_m}$

Beziehung in Vorlesung hergeleitet:

Induktivität einer Ringkernspule	$L = N^2 \frac{\mu h}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$ $\approx N^2 \frac{\mu h}{2\pi} \frac{b-a}{a}, b-a \ll a$	N, Windungszahl μ , Magnetische Permeabilität h, Kernhöhe b, Äusserer Radius a, Innerer Radius
Induktivität einer Doppelleitung pro Längeneinheit	$L = \frac{\mu_0}{\pi} \left(\frac{1}{4} + \ln\left(\frac{b}{a}\right) \right)$	μ_0 , Permeabilitätskonstante b, Leiterabstand a, Leiterradius

3. Magnetismus

6 Punkte

Betrachten Sie die Anordnung in Abb. 6(a), bestehend aus einem magnetischen Kern, einem Balken sowie zwei Wicklungen um den Kern. An Wicklung mit N_1 Windungen ist eine Stromquelle I_1 angeschlossen, Wicklung 2 mit N_2 Windungen ist offen. Sowohl der Kern wie auch der Balken haben eine Permeabilität von μ_r . Abb. 6(b) zeigt die Geometrie genauer: Der Kern hat eine uniforme Breite w und Tiefe (z-Richtung) d . Die mittlere Länge der einzelnen Elemente ist l_{Kern} und l_{Balken} . Der Balken mit Querschnittsfläche A befindet sich im Abstand h über dem Kern. Vernachlässigen Sie Streufelder.

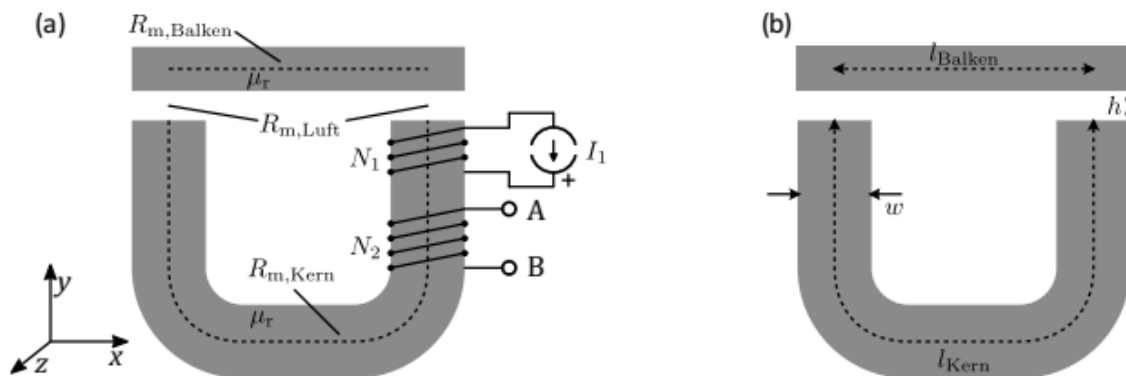


Abb. 6

(a) Berechnen Sie die magnetischen Widerstände $R_{m,\text{Kern}}$, $R_{m,\text{Balken}}$ und $R_{m,\text{Luft}}$.

(1 P)

$$R_{m,\text{Kern}} = \frac{l_{\text{Kern}}}{\mu_r \mu_0 w d}$$

$$R_{m,\text{Luft}} = \frac{2 \cdot h}{\mu_0 w d}$$

$$\approx 1 \Rightarrow \frac{2h}{\mu_0 w d}$$

$$R_{m,\text{Balken}} = \frac{l_{\text{Balken}}}{\mu_r \mu_0 A}$$

Lösung:

$$R_{m,\text{Kern}} =$$

$$R_{m,\text{Balken}} =$$

$$R_{m,\text{Luft}} =$$

- (b) Berechnen Sie den gesamten magnetischen Widerstand R_m als Funktion der in (a) definierten Widerstände. (Die Geometrie muss nicht erneut eingesetzt werden) (1 P)

$$R_m = R_{m, \text{Balken}} + R_{m, \text{Luft}} + R_{m, \text{Kern}}$$

Lösung: $R_m =$

- (d) Ordne die magnetischen Widerstände der folgenden drei Anordnungen aus Sicht der Spule der Größe nach an. Der Eisenkern (grau) hat einen uniformen Querschnitt $a \times a$ sowie $\mu_r \gg 1$. (1.5 P)

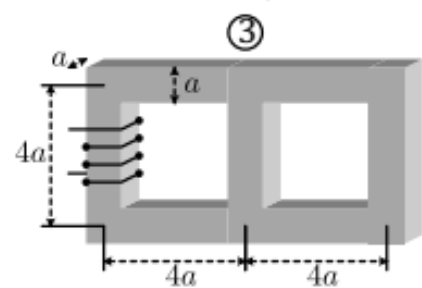
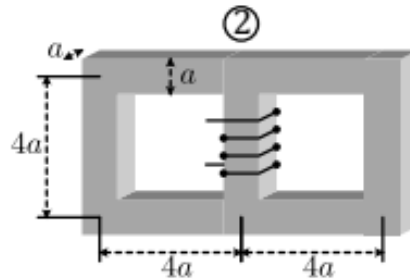
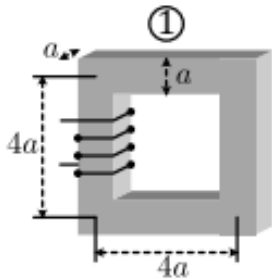
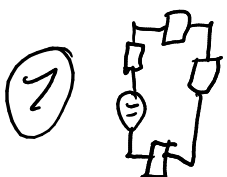


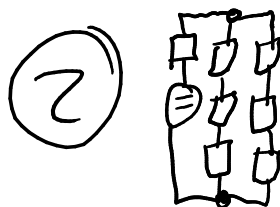
Abb. 10

$$2 < 3 < 1$$

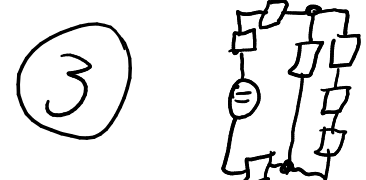
Es gilt: $R_{m_i} = \frac{l_i}{A_i \mu} \Rightarrow \frac{4a}{\mu a^2} = \frac{4}{\mu a}$



$$R_m = \frac{16}{\mu a}$$



$$\frac{4}{\mu a} + \frac{6}{\mu a} = \frac{10}{\mu a}$$



$$\frac{12}{\mu a} + \left(\frac{4}{\mu a} \right)$$

3. Statische Magnetfelder**8 Punkte**

Betrachten Sie den magnetischen Kreis in Abb. 6. Die wesentlichen Komponenten sind in Abb. 6(a) gezeigt: Eine Wicklung N_1 sowie die Geometrie mit zugehörigen magnetischen Ersatzwiderständen. Abb. 6(b) zeigt die Geometrie in mehr Detail: Der Kern hat einen uniformen Querschnitt von $w \cdot t$, sowie Permeabilität μ_r . Die Luftspalte haben Dicke d , Streufelder können vernachlässigt werden.

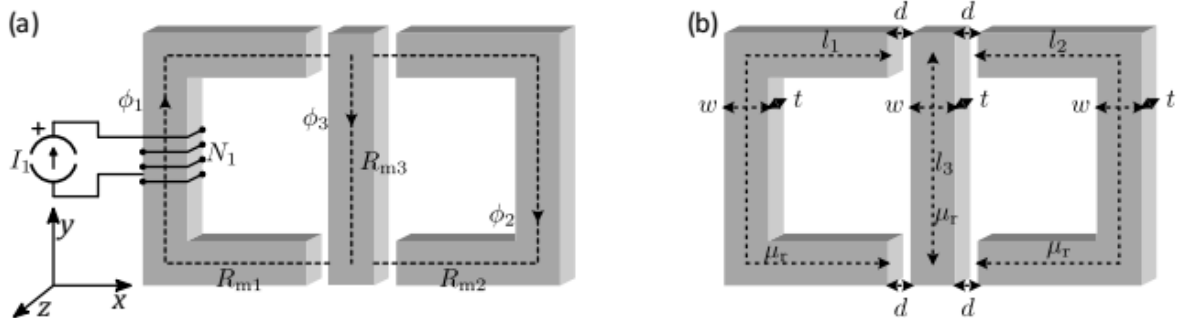


Abb. 6

- (a) Berechnen Sie den magnetischen Widerstand R_{m1} bestehend aus dem linken Schenkel sowie den zwei linken Luftspalten. **(1.5 P)**

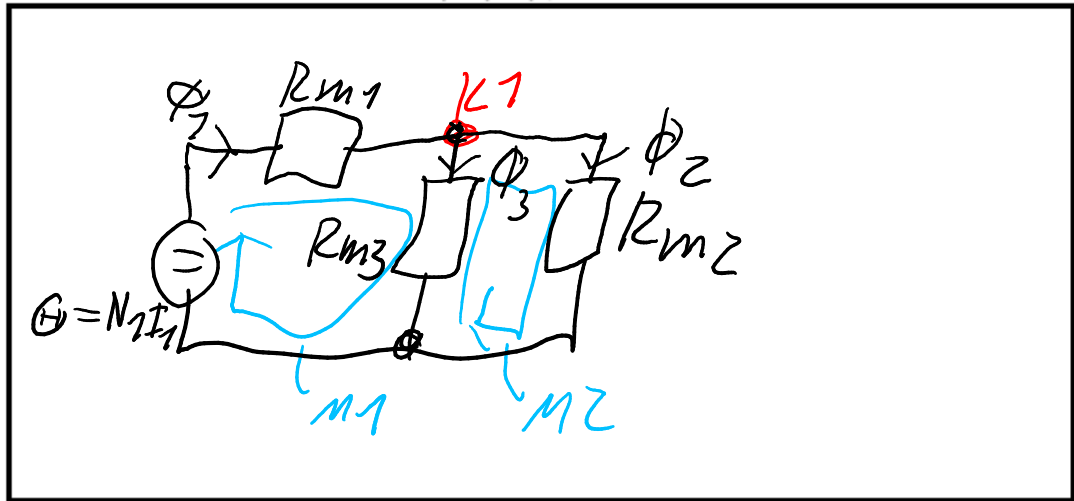
$$R_{m1} = R_{SL} + 2R_L = \frac{1}{\mu_0 \mu_r} \left(\frac{l_1 + 2d}{wt} \right)$$

$$R_{SL} = \frac{l_1}{\mu_r \mu_0 wt}$$

$$R_L = \frac{d}{\mu_0 wt}$$

Lösung: $R_{m1} =$

- (b) Zeichnen Sie ein magnetisches Ersatzschaltbild bestehend aus der Wicklung und den drei Widerständen. Zeichnen Sie auch die Flüsse ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 ein. (1.5 P)



- (c) Stellen Sie für das Netzwerk zwei Maschengleichungen und eine Knotengleichung auf. Schreiben Sie die Maschengleichungen als Funktion der Flüsse ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 , also setzen Sie das Ohm'sche Gesetz ein. (2 P)

M1:

$$N_1 I_1 = R_{m1} \phi_1 + R_{m3} \phi_3$$

M2:

$$R_{m3} \phi_3 = R_{m2} \phi_2$$

K1:

$$\phi_1 = \phi_2 + \phi_3$$

(d) Berechnen Sie das Magnetfeld \vec{H}_3 im mittleren Stab (R_{m3}) in Abhängigkeit der magnetischen Widerstände $R_{m,i}$ sowie der Geometrie. (3 P)

$$H_3 = \frac{1}{\mu_r \mu_0} B_3 [I]$$

$$B_3 = \phi_3 / A [I]$$

\Rightarrow Flussteiler

$$\phi_3 = \phi_1 \frac{R_{m3}}{R_{m3} + R_{m2}} \stackrel{(i)}{=} \frac{N_1 I_1}{R_{m1} + \frac{R_{m2} R_{m3}}{R_{m2} + R_{m3}}} \cdot \frac{R_{m3}}{R_{m3} + R_{m2}}$$

mit $\phi_1 = \phi_{tot}$

$$\Rightarrow \phi_{tot} = \mathcal{H} / R_{tot} = \frac{N_1 I_1}{R_{m1} + \frac{R_{m2} R_{m3}}{R_{m2} + R_{m3}}} \quad (i)$$

$$\phi_3 = \frac{N_1 I_1 R_{m3}}{R_{m1} R_{m3} + R_{m2} R_{m1} + R_{m2} + R_{m3}} = B_3 \cdot A [I]$$

$$\Rightarrow H_3 = \frac{N_1 I_1 R_{m3}}{R_{m1} R_{m3} + R_{m2} R_{m1} + R_{m2} + R_{m3}} \cdot \frac{1}{\mu_r \mu_0 \mu_0} [I]$$

$$\hookrightarrow \text{Vec.: } \vec{H}_3 = H_3 (-\vec{e}_y)$$

Lösung: $\vec{H}_3 =$